ÉPREUVE SPÉCIFIQUE
FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Dans ce problème, on note E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée X, et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$ la base canonique de E.

Nous noterons également E_n le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B}_n = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de E_n.

Enfin, nous noterons u l'endomorphisme de E qui à tout polynôme $P \in E$ associe le polynôme $Q = u(P)$ défini par $Q(X) = (1 - X^2)P''(X) - 2XP'(X)$, où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P. On pourra remarquer que $Q(X) = [(1 - X^2)P'(X)]'$.

I

1°) a) Déterminer $u(P)$ lorsque P est un polynôme constant.

b) Soit P un polynôme de degré $k \geq 1$. Déterminer le degré de $u(P)$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est stable par u, c'est à dire que pour tout $P \in E_n$, on a $u(P) \in E_n$.

Nous noterons désormais u_n la restriction de u à E_n, qui est donc un endomorphisme de E_n.

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit M_n la matrice représentative de u_n dans la base canonique $\mathcal{B}_n$.

a) Calculer $u(X^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) Ecrire M_0, M_1, M_2, M_3.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice M_n est triangulaire supérieure. En déduire les valeurs propres de u_n, ainsi que les dimensions des sous-espaces propres associés. L'endomorphisme u_n est-il diagonalisable ?

II

On munit à présent E du produit scalaire $(\ |\ )$ suivant :

$$\forall P \in E,\ \forall Q \in E,\ (P \mid Q) = \int_{-1}^{+1} P(X)Q(X)dX$$

(il n'est pas demandé de démontrer qu'il s'agit effectivement d'un produit scalaire).

1°) Soient $P \in E_n$ un vecteur propre de u_n associé à la valeur propre λ, Q un élément quelconque de E_n. Montrer que l'on a :

$$\lambda\ (P \mid Q) = -\int_{-1}^{+1} (1-X^2)P'(X)Q'(X)dX\ .$$

En déduire que si $P \in E_n$ et $Q \in E_n$ sont deux vecteurs propres de u_n associés respectivement à deux valeurs propres λ et μ distinctes, on a nécessairement $(P \mid Q) = 0$.

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n le sous-espace orthogonal de E_n dans E_{n+1} pour le produit scalaire défini ci-dessus.

a) Quelle est la dimension de F_n ?

b) Montrer que F_n est, pour tous les endomorphismes u_k ($k \geq n+1$), le sous-espace propre associé à une valeur propre que l'on précisera.

c) Soit $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n, \ldots)$ une suite infinie d'éléments non nuls de E.

Montrer que les deux conditions (A) et (B) suivantes sont équivalentes :

(A) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de vecteurs propres de u_n.

(B) La suite $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n, \ldots)$ vérifie les deux conditions suivantes :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de Q_n est égal à n.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$ tels que $m \neq n$, on a $(Q_n \mid Q_m) = 0$.

3°) Soit la fonction de deux variables réelles $f(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$.

a) Calculer $(1-x^2)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - 2x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) + t\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}[tf(x,t)]$.

b) Pour $x \in [-1, 1]$ fixé, soit $f(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(x)t^n$ le développement de la fonction $f(x, t)$ en série entière de la variable t.

Nous admettrons que ce développement est valide pour tout couple $(x, t) \in [-1, 1] \times\ ]-1, 1[$, indéfiniment dérivable terme à terme sur ce domaine tant par rapport à la variable t que par rapport à la variable x, et que les coefficients $Q_n(x)$ sont des fonctions polynômes de la variable x.

Montrer que la suite infinie $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n, \ldots)$ de polynômes vérifie la condition (A) définie à la question II.2.c.

c) Ecrire les développements en série entière de la variable t des fonctions $f(0, t)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,t)$ et $f(1, t)$.

On utilisera le développement en série entière :

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}u^n + \ldots$$

En déduire les valeurs de $Q_n(0)$, $Q_n'(0)$ (selon la parité de n) et de $Q_n(1)$.

4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n(X)$ le polynôme défini par $P_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n}\left[(X^2-1)^n\right]$.

a) Montrer que la suite infinie $(P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots)$ de polynômes vérifie la condition (B) définie à la question II.2.c. On pourra vérifier l'orthogonalité de P_n et P_m pour $m \neq n$ en effectuant une suite d'intégrations par parties.

b) Calculer $P_n(1)$. En déduire que la suite $(P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots)$ coïncide avec la suite de polynômes $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n, \ldots)$ définie à la question II.3.b.

III

Soit λ un nombre réel positif ou nul. On considère l'équation différentielle du 2° ordre linéaire homogène (L_λ) suivante : $(1 - x^2)\,y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0$.
On se propose d'étudier les solutions de cette équation sur $]-1, +1[$ qui sont développables en série entière sur cet intervalle.

1°) Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière, non identiquement nulle.
Montrer que pour que $y(x)$ soit solution de (L_λ), il faut et il suffit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ les coefficients a_n et a_{n+2} soient liés par une relation que l'on déterminera. Calculer les coefficients a_n en fonction de a_0, a_1 et n (on distinguera les cas selon la parité de n).

2°) On suppose λ non entier. Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ?

3°) On suppose que $\lambda = 2p$, où p est un nombre entier naturel. Vérifier que la solution de (L_λ) développable en série entière telle que $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ est un polynôme.
Comparer ce polynôme au polynôme $Q_{2p}(X)$ défini à la question II.3.b.

4°) On suppose que $\lambda = 2p + 1$, où p est un nombre entier naturel. Vérifier que la solution de (L_λ) développable en série entière telle que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ est un polynôme.
Comparer ce polynôme au polynôme $Q_{2p+1}(X)$ défini à la question II.3.b.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail